Systèmes de réécritures orthogonaux non effacants et linéaires droite : application au problème de Zantema

Elias Tahhan Bittar

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

Systèmes de réécritures orthogonaux non effaçants et linéaires droite application au problème de Zantema

Elias TAHHAN BITTAR

N° 2202
Mars 1994

PROGRAMME 2

Calcul symbolique,
programmation
et génie logiciel

Rapport
de recherche

1994

Systèmes de Réécritures Orthogonaux non Effaçants et Linéaires Droite Application au Problème de Zantema

Elias Tahhan Bittar *

Laboratoire de Mathématiques Discrètes et d'Informatique. Université Claude-Bernard, Lyon-I.
43 Bd du 11 Novembre 1918, 69622 Villeurbanne Cedex. France.
tahhan@lan1.univ-lyon1.fr

Résumé Nous étudions les systèmes de réécriture orthogonaux, non effaçants et linéaires droite. On montre que si un terme clos est normalisable alors il est fortement normalisable et que toutes ses normalisations ont la même longueur. On définit ensuite la *linéarité pour des redex internes* et la *sortie d'un redex interne*, On montre que si telles sorties ont une taille bornée alors la linéarité pour des redex internes est équivalente à la linéarité. Ces résultats permettent de donner une preuve inductive et élémentaire la linéarité du système de Zantema. On montre, ensuite, par une technique de *dichotomie par marquage en avant*, la *conjecture de Zantema* à savoir que le système de Zantema a un facteur de linéarité 2.
Mots Clé : Systèmes de réécritures de mots, Systèmes de réécritures orthogonaux, Compléxité de systèmes de réécritures.

Abstract We study non erasing, right linear, orthogonal term rewrite systems. We show that a ground term is normalisable if and only if it is strongly normalisable and that all normalisations have the same length. We then define *linearity for an innermost redex* and *output of an innermost redex*. We show that if such outputs have a bounded size then linearity for innermost redexes is equivalent to linearity. This results allow us to give an inductive and elementary proof of the linearity of *Zantema's System*. We proof *Zantema's Conjecture*, for his system, by a technique of *dichotomy by forward marking*.
Keywords: String rewriting systems, orthogonal rewriting systems, complexity of orthogonal rewriting systems. .

Table des matières

* Ce travail de recherche a été financé par l'Université des Andes et le CONICIT au Vénézuela

1 Introduction

Considérons des mots dans $\{0,1\}^*$. Le système de réécriture de *Zantema*, noté $\mathcal{Z}$, est défini par la règle :

$$0011 \longrightarrow 111000$$

Rappelons que, par définition, $\mathcal{Z}$ est invariant par contexte et par substitution :

$$\forall a, b, u, v \in \{0,1\}^* \quad a \longrightarrow b \quad \Rightarrow \quad u \cdot a \cdot v \longrightarrow u \cdot b \cdot v$$

Notons que $\mathcal{Z}$ ne peut être prolongée par un ordre de simplification, s'il pouvait l'être la prolongation, notée $\longrightarrow_p$, satisfierait la *propriété du sous-terme*, c'est à dire :

$$\forall f \in \{0,1\} \quad f(x) \longrightarrow_p x$$

donc :

$$\forall a, u, v \in \{0,1\}^* \quad u \cdot a \cdot v \longrightarrow_p u \cdot v$$

Ce qui impliquerait que l'ordre de réduction de $\longrightarrow_p$ contiendrait l'ordre de Higman sur $\{0,1\}^*$, or ce n'est pas le cas :

$$\begin{aligned}(0011)0111111 &\longrightarrow 11100(0011)1111\\ &\longrightarrow 111001110(0011)11\\ &\longrightarrow 1110011101110(0011)\\ &\longrightarrow 111\underline{0011}1\underline{0111}0\underline{111}000\end{aligned}$$

Le premier terme est plus petit que le dernier dans l'ordre de Higman $\{0,1\}^*$. On ne peut donc trouver des ordres *l.p.o.* ou *r.p.o.* qui prolongent l'ordre de réduction de $\mathcal{Z}$.

Plusieurs preuves de la terminaison de $\mathcal{Z}$ ont déjà été proposées :

- Hans Zantema a remarqué l'existence de configurations irréductibles à gauche et proposé, par voie éléctronique, une tentative de preuve. H. Zantema a aussi conjecturé que cette terminaison est linéaire, plus fortement encore, il a conjecturé qu'il existe une constante, $c \in \boldsymbol{N}$, tel que pour tout mot de longueur n la normalisation de ce mot s'effectue au plus en $2 \cdot n + c$ étapes.
- Dans la lignée de Zantema, Alfons Geser [4] a donné une preuve grâce à la terminaison de deux systèmes de réécritures intermediaires en utilisant la methode des transformations d'odre de Bellegarde et Lescanne [1].
- D'un autre côté, Nachum Dershowitz et Charles Hoot [2] ont prouvé, par une méthode de mauvaise suite minimale, que la terminaison des systèmes de réécritures orthogonaux linéaires droite non effaçants est équivalente à la terminaison de la clôture plus externe en avant; cette dernière propriété est facilement prouvable pour $\mathcal{Z}$. La détection de configurations irréductibles joue aussi un rôle dans cette preuve.

- Michael J. O'Donnell [6] a prouvé que, pour des systèmes de réécritures orthogonaux, la terminason est équivalente à la normalisation forte par réduction des redex internes. Nous avons aussi pu estimer [8, 9], pour les systèmes de réécritures orthogonaux, des bornes de la longueur des dérivations d'un terme clos en fonction des bornes de redex obtenus à partir de t par normalisation interne, le travail que nous developpons ici s'inscrit dans cette lignée[2].

Remarquons que $\mathcal{Z}$ est un système de réécriture orthogonal, non effaçant et linéaires droite (ou de multiplicité un). On étudie d'abord des propriétés de tels sytèmes :

- On montre que si un terme clos est normalisable alors il est fortement normalisable et que toutes ses normalisations ont la même longueur.
- Puis on définit la notion de linéarité pour des redex internes et la notion de sortie d'un redex interne. On montre ensuite que si telles sorties[3] ont une taille bornée alors la linéarité pour des redex internes est équivalente à la linéarité.

Mettant à profit des observations de Zantema lors du *First Workshop on Termination*[4] tenu à l'Université de *St. Andrews*, nous identifions la forme des redex internes pour le système $\mathcal{Z}$. Une fois cette identification faite on donne une preuve inductive et élémentaire de la normalisation interne, et donc de terminaison puisque $\mathcal{Z}$ est orthogonal, et de la linéarité pour des redex internes. Nous identifions ensuite les sorties possibles; leurs tailles étant bornées on en conclut la linéarité de $\mathcal{Z}$.

Ensuite on s'attelle à prouver la conjecture de Zantema en sa version forte. On montre, par une technique de *dichotomie par marquage en avant*, que $\mathcal{Z}$ est linéaire de facteur 2.

2 Systèmes de Réécritures Orthogonaux , SRTO

Les définitions et notations que nous utilisons proviennent, pour la plupart d'entre eux, de [3, 5, 7].

2.1 Algèbres de Termes

Une **Signature** $\mathcal{F}$ est un alphabet noté aussi $\mathcal{F}$ tel qu'un nombre entier naturel dit une **arité** est associé à chaque lettre. On note aussi $\mathcal{F} = \cup_{n \in \boldsymbol{N}} \mathcal{F}_n$, où $\mathcal{F}_n$ est un ensemble de lettres d'arité n. Les éléments de $\mathcal{F}$ d'arité nulle, $\mathcal{F}_0$, sont dits des **constantes**. Soit $\mathcal{F}$ une signature et soit $\mathcal{V}$ un ensemble dénombrables de symboles de variables. L'**algèbre de termes $\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ sur $\mathcal{F}$ et $\mathcal{V}$** est le plus petit ensemble contenant $\mathcal{V}$ et les constantes tel que $u = f(t_0, \ldots, t_m)$ est dans $\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ chaque fois que f est une lettre d'arité $m+1$ et chaque t_i est lui même un terme de $\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$, chaque t_i est dit **sous-terme immédiat de** u. On peut donc définir $\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ par :

1. $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$,
2. $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$,
3. $f \in \mathcal{F}_{m+1}$, $\forall i \leq m \quad t_i \in \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V}) \Rightarrow f(t_0, \ldots, t_m) \in \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$.

Un terme sans variables est dit **clos**. **L'algèbre de termes clos** est notée $\mathcal{G}(\mathcal{F})$.

L'ensemble des suites finies d'entiers naturels est noté $\boldsymbol{N}^*$. Remarquons que la suite vide, notée Λ, est un élément de $\boldsymbol{N}^*$. Les éléments de $\boldsymbol{N}^*$ sont aussi appelés **mots de $\boldsymbol{N}^*$**. La concatenation de deux mots de $\boldsymbol{N}^*$, p et q, notée $p \cdot q$, est définie par $\Lambda \cdot p = p = p \cdot \Lambda$ et $< n_0, \ldots, n_k > \cdot < m_0, \ldots, m_l > := < n_0, \ldots, n_k, m_0, \ldots, m_l >$. Soit $p \in \boldsymbol{N}^*$, et $A \subseteq \boldsymbol{N}^*$, la **concatenation de p et de A** est définie par $p \cdot A := \{p \cdot q \mid q \in A\}$. L'ordre préfixe sur

[2] Une première version de ce travail a circulé, par voie éléctronique, depuis le début de juin 93.

[3] Cette définition se recoupe avec celle de partie active de Dershowitz-Hoot.

[4] Alfons Gesser a aussi mis à profit ces remarques pour donner sa preuve de terminaison de $\mathcal{Z}$.

les mots de $\boldsymbol{N}^*$, noté $\leq$, est défini par $p \leq q \iff (\exists r \in \boldsymbol{N}^* \quad q = p \cdot r)$. Deux mots, p et q, de $\boldsymbol{N}^*$ sont **parallèles** s'ils sont incomparables pour l'ordre préfixe, on note $p \parallel q$. Un ensemble $\Pi \subset \boldsymbol{N}^*$, est dit **ensemble de mots parallèles** si les mots de Π sont deux à deux parallèles.

Un **arbre structuré** A est un sous-ensemble fini de $\boldsymbol{N}^*$ défini par :

1. $A \subset \boldsymbol{N}^*$, $A < \infty$,
2. $q \in A,\ p \leq q \Rightarrow p \in A$,
3. $\forall k \in \boldsymbol{N},\ \ p \cdot < k > \in A \Rightarrow \forall j < k,\ \ p \cdot < j > \in A$.

Les éléments d'un arbre sont dits **nœuds** de cet arbre. Un nœud maximal de A, pour l'ordre préfixe, est dit une **feuille de** A; le nœud Λ, (minimal de A, pour l'ordre préfixe), est dit la **racine de** A.

A un terme t, dans $\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$, on peut associer un arbre structuré étiqueté, dit **arbre des positions de** t, noté $\mathcal{P}os(t)$; chaque nœud, $p \in \mathcal{P}os(t)$, est étiqueté par un symbole d'arité égale au nombre des successeurs de p dans l'ordre préfixe. L'arbre des positions est défini par :

1. $c \in \mathcal{F}_0 \Rightarrow \mathcal{P}os(c) := \Lambda$,
2. $x \in \mathcal{V} \Rightarrow \mathcal{P}os(x) := \Lambda$,
3. $\mathcal{P}os(f(t_0, \ldots, t_m)) := \{\Lambda\} \cup (\cup_{k=0}^{k=m} < k > \cdot \mathcal{P}os(t_k))$.

L'ensemble des positions de $\mathcal{P}os(t)$ étiquetées par des variables est noté $\mathcal{VP}os(t)$.

Le **sous-terme** de t à la position p, noté $t\mid_p$ est défini par :

1. $t\mid_\Lambda := t$
2. $f(t_0, \ldots, t_m)\mid_{<k>\cdot u} := t_k\mid_u$

Par exemple si d et g sont deux lettres et u est un terme alors $d(x, g(u))\mid_{<1,0>} = u$.

Soit f une lettre ou une variable, Si $t\mid_p = f(t_0, \ldots, t_m)$ ou $t\mid_p = f$ on dit que f **occurre** à la position p de t, ou bien que p est une **occurrence** de f dans t. On note $\mathcal{O}_t(f)$ l'ensemble des occurences de f dans t. On dit que f **occurre** dans t si $\mathcal{O}_t(f) \neq \emptyset$. Une variable qui occurre dans t est dite **variable de** t. On note $\mathcal{V}ar(t)$ l'**ensemble des variables de** t.

Nous adoptons donc la terminologie suivante, un mot $p \in \boldsymbol{N}^*$ peut désigner :

1. Un nœud d'un arbre structuré.
2. Une position d'un terme.
3. Une occurence, dans un terme, d'une lettre ou d'une variable.

La **remplacement de** $t\mid_p$ **par** s **dans** t, noté $t[s]_p$, est défini par :

1. $(t[s]_p)\mid_p := s$,
2. $\forall f \in \mathcal{F} \cup \mathcal{V}, \forall q \not\geq p \quad q \in \mathcal{O}_t(f) \Leftrightarrow q \in \mathcal{O}_{t[s]_p}(f)$.

Soit $\Pi \subseteq \mathcal{P}os(t)$ un ensemble de positions parallèles de t, soit $S_\Pi = \{s_p\}_{p\in\Pi}$ une famille de termes indexés par Π, le **remplacement parrallèle de** $\{t\mid_p\}_{p\in\Pi}$ **par** $\{s_p\}_{p\in\Pi}$ **dans** t consiste à remplacer succesivement chaque $t\mid_p$ par s_p. On note $t[S_\Pi]_\Pi$. Notons que le remplacement à des positions parallèles est commutatif, *i.e* si $p \parallel \bar{p}$ alors $(t[s_p]_p)[\bar{s}_{\bar{p}}]_{\bar{p}} = (t[\bar{s}_{\bar{p}}]_{\bar{p}})[s_p]_p$; donc la définition de $t[S_\Pi]_\Pi$ ne dépend pas de l'ordre choisi des remplacements. Si on remplace dans t chaque sous-terme $t\mid_p$ par le même terme s, on note ce remplacement $t[s]_\Pi$.

Soit x une variable, soit s un terme, **la substitution de la variable** x **par le terme** s **dans le terme** t, notée $t[x \leftarrow s]$, est définie par :

$$t[x \leftarrow s] := t[s]_{\mathcal{O}_t(x)}$$

Les subsitutions succesives, dans un terme t, d'un ensemble de variables X par un ensemble de termes $\{s_x\}_{x\in X}$ est notée $t[\{x \leftarrow s_x\}_{x\in X}]$

Une application de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ est dite une **substitution.** Soit σ une substitution, **l'application de la substitution σ au terme** t, notée $t\sigma$ est définie par :

$$t\sigma = t[\{x \leftarrow \sigma(x)\}_{x \in \mathcal{V}ar(t)}]$$

On distingue une variable dite **trou**, notée Ω. Un **contexte** est un terme de $\mathcal{T}(\mathcal{F}, \{\Omega\})$. Le terme $t[\Omega]_p$ est appelé **contexte de la position p dans le terme t**, on le note $t\ |^p$. Notons que $(t\ |^p)[t\ |_p]_p = t$. De même si Π est un ensemble de positions parallèles, le **contexte de Π dans** t, noté $t\ |^{\Pi}$ est défini par $t\ |^{\Pi} = t[\Omega]_{\{p \in \Pi\}}$.

2.2 Systèmes de Réécritures

Systèmes de Réécritures Linéaires Gauche Une **règle de réécriture linéaire gauche** ρ est la donnée d'une paire de contextes (l, r), tel que $l \neq \Omega$, et d'une application f_ρ de $\mathcal{O}_r(\Omega)$ dans $\mathcal{O}_l(\Omega)$. On note $\rho : (l \longrightarrow r, f_\rho)$ cette donnée. Soit $\mathcal{O}_r(\Omega) = \{q_j\}_{j \in J}$ et $\mathcal{O}_l(\Omega) = \{p_i\}_{i \in I}$, l'application f_ρ est univoquement définie par une application que l'on note aussi $f : J \longrightarrow I$. Soit t un terme clos tel que $t = u\left[l[u_i]_{\{p_i\}}\right]_p$ et $\rho : (l \longrightarrow r, f_\rho)$ une règle de réécriture. Alors la **réécriture de t au nœud p selon la règle ρ** est le terme clos défini par $\rho(t, p) = u\left[r[u_{f(j)}]_{\{q_j\}}\right]_p$. On note $t \xrightarrow[\rho]{p} \rho(t, p)$. On a donc :

$$t = u\left[l[u_i]_{\{p_i\}}\right]_p \xrightarrow[\rho]{p} u\left[r[u_{f(j)}]_{\{q_j\}}\right]_p = \rho(t, p)$$

Dans ce cas là on dit que $l[u_i]_{\{p_i\}}$ est un **redex contenu dans t.**

Remarquons que cette définition coincide avec la définition classique à savoir, une règle de réécriture linéaire gauche est la donnée d'une paire, (l, r), de termes de $\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ tel que toute variable de r est une variable de l et toute variable de l occure exactement une seule fois dans l. En effet soit $f_{(l,r)}$ l'application de $\mathcal{VP}os(r)$ dans $\mathcal{VP}os(l)$ qui a chaque position d'une variable de r associe *la* position de cette même variable dans l. Soit aussi $\rho_{(l,r)} := \left(l[\Omega]_{\mathcal{VP}os(l)} \longrightarrow r[\Omega]_{\mathcal{VP}os(r)}, f_{(l,r)}\right)$. La réécriture de t selon la règle (l, r) à la position p est définie par :

$$t = u\left[l\left[\{x \leftarrow u_x\}_{x \in \mathcal{V}ar(l)}\right]\right]_p \xrightarrow[(l,r)]{p} u\left[r\left[\{x \leftarrow u_x\}_{x \in \mathcal{V}ar(l)}\right]\right]_p$$

On peut aisemment vérifier que $u\left[r\left[\{x \leftarrow u_x\}_{x \in \mathcal{V}ar(l)}\right]\right]_p = \rho_{(l,r)}(t, p)$

Un **système de réécritures linéaire gauche** $\Sigma(\mathcal{G}(\mathcal{F}))$ est un ensemble de règles de réécritures linéaires gauche .

Soit $\rho : (l \longrightarrow r, f_\rho)$ une règle de réécriture, le contexte l est dit **contexte de gauche de** ρ, le contexte r est dit **contexte de droite de** ρ.

Systèmes de Réécritures Orthogonaux Soient deux contextes $l_1 \in \mathcal{T}(\mathcal{F}, \{\Omega\})$ et $l_2 \in \mathcal{T}(\mathcal{F}, \{\Omega\})$, soit p une position de l_1 et Π un ensemble de positions parallèles de l_2. On dit que **les contextes l_1 et l_2 se superposent en** (p, Π) si :

$$l_1 = l_1\ |^p \left[l_2\ |^{\Pi}\right]_p$$

Un système de réécriture linéaire gauche, $\Sigma(\mathcal{G}(\mathcal{F}))$, est **orthogonal**, SRTO, si les contextes de gauche des règles de $\Sigma(\mathcal{G}(\mathcal{F}))$ sont deux à deux non superposables.

Un SRTO est dit **non effaçant de multiplicité un** ou **non effaçant et linéaire droite** si pour toute règle de réécriture, $\rho : (l \longrightarrow r, f_\rho)$, l'application f_ρ est une bijection de de $\mathcal{O}_r(\Omega)$ dans $\mathcal{O}_l(\Omega)$. (Avec la présentation usuelle, pour toute règle de réécriture $\alpha \longrightarrow \beta$, toute variable de α a une et une seule occurence dans β).

3 SRTO Non Effaçants de Multiplicité Un

3.1 Independance

Proposition 3.1 *Soit $\mathcal{R}$ un R.T.S.* orthogonal, non effaçant *et de* multiplicité un. *Alors pour tout terme t les longueurs des dérivations qui le normalisent sont toutes égales.*

Preuve

Dans la suite de la preuve p_i, q_i et r_i désignent des positions. La réduction d'un redex de t de position q est notée par $t \xrightarrow{\{p\}} t'$. L'égalité entre terme est aussi notée $t \xrightarrow{\emptyset} t'$.

Soient p et q deux positions tel que $p \neq q$, puisque $\mathcal{R}$ est non effaçant et de multiplicité un, il existe une position p_q et une autre q_p tel que :

$$\begin{tikzcd} t_0 \arrow[r, "\{p\}"] \arrow[d, "\{q\}"'] & t_1 \arrow[d, "\{q_p\}"] \\ s_0 \arrow[r, "\{p_q\}"] & s_1 \end{tikzcd}$$

On a aussi :
$$\begin{tikzcd} t_0 \arrow[r, "\{p\}"] \arrow[d, "\emptyset"'] & t_1 \arrow[d, "\emptyset"] \\ s_0 \arrow[r, "\{p\}"] & s_1 \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} t_0 \arrow[r, "\{p\}"] \arrow[d, "\{p\}"'] & t_1 \arrow[d, "\emptyset"] \\ s_0 \arrow[r, "\emptyset"] & s_1 \end{tikzcd}$$

Soit, $\sigma =< p_1, \ldots, p_n >$, une suite de réécritures qui normalisent t_0. Les considérations antérieures nous assurent q'il existe i et $q_{i-1} = p_i$ tel que :

$$\begin{tikzcd} t_0 \arrow[r, "\{p_1\}"] \arrow[d, "\{q_0\}"'] & t_1 \arrow[d, "\{q_1\}"'] & \cdots & t_{i-2} \arrow[r, "\{p_{i-1}\}"] \arrow[d, "\{q_{i-2}\}"] & t_{i-1} \arrow[r, "\{p_i\}"] \arrow[d, "\{q_{i-1}\}"', "=\{p_i\}"] & t_i \arrow[r, "\{p_{i+1}\}"] \arrow[d, "\emptyset"] & t_{i+1} \arrow[d, "\emptyset"] & \cdots & \downarrow(t_0) \arrow[d, "\emptyset"] \\ s_0 \arrow[r, "\{r_1\}"] & s_1 & \cdots & s_{i-2} \arrow[r, "\{r_{i-1}\}"] & s_{i-1} \arrow[r, "\emptyset"] & s_i \arrow[r, "\{p_{i+1}\}"] & s_{i+1} & \cdots & \downarrow(t_0) \end{tikzcd}$$

Soit $q_0(\sigma) =< r_1, \ldots, r_{i-1}, p_{i+1}, \ldots, p_n >$, la suite de réécritures de s_0, alors :

$$\begin{tikzcd} t_0 \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\{q_0\}"'] & \downarrow(t_0) \arrow[d, "\emptyset"] \\ s_0 \arrow[r, "q_0(\sigma)"] & \downarrow(t_0) \end{tikzcd}$$

et

$$long(\sigma) = long(< q_0 > \cdot [q_0(\sigma)])$$

Soit donc $\rho =< q_0, \ldots, q_m >$ une suite qui normalise aussi t_0. En itérant le raisonnement développé ci-dessus nous avons :

$$\begin{tikzcd} t_0 \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\{q_0\}"'] & \downarrow(t_0) \arrow[d, "\emptyset"] \\ u_1 \arrow[r, "q_0(\sigma)"] \arrow[d, "\{q_1\}"'] & \downarrow(t_0) \arrow[d, "\emptyset"] \\ u_2 \arrow[r, "q_1(q_0(\sigma))"] & \downarrow(t_0) \\ \vdots \arrow[d, "\{q_m\}"'] & \vdots \arrow[d, "\emptyset"] \\ \downarrow(t_0) \arrow[r, "q_m\cdots(q_1(q_0(\sigma))\cdots)", "=\emptyset"'] & \downarrow(t_0) \end{tikzcd}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
long(\sigma) &= long\,(< q_0 > \cdot[q_0(\sigma)]) \\
&= long\,(< q_0 > \cdot < q_1 > \cdot[q_1\,(q_0(\sigma))]) \\
&\vdots \\
&= long\,(< q_0 > \cdots < q_m > \cdot[q_m\,(\ldots q_0(\sigma)\ldots)]) \\
&= long(< q_0, \ldots, q_m >) \\
&= long(\delta)
\end{aligned}$$

□

3.2 Linéarité pour des Redex Internes et Linéarité

Dans cette sous-section on définit la linéarité pour des redex internes, les sorties et on montre que si la taille de sorties est borné alors la linéarité pour des redex internes implique la linéarirté.

Definition 3.1 (Linéarité pour des Redex Internes) *Soit $\mathcal{R}$ un R.T.S.* orthogonal, non effaçant *et de* multiplicité un.

1. *Un terme t est dit un* **redex interne**, *(pour $\mathcal{R}$), si t contient un redex et aucun de ces sous-termes immédiats ne contient des redex. On note $\mathcal{RI}$ l'ensemble des redex internes.*
2. *Un système de réécriture est dit* **Linéaire pour les redex internes** *si la complexité de réduction des redex internes est linéaires.* i.e.:

$$\exists b \in \boldsymbol{N},\ \forall t \in \mathcal{RI}, \quad \lambda(t) \leq b \cdot long(t)$$

Definition 3.2 (Sorties) *Soit $t = u_g \cdot v \cdot u_d$ un mot*[5].

1. *Le sous-mot v de t est dit* **élémentairement irréductible dans** *t si toute réécriture de t est ou bien réécriture de u_g ou bien réécriture de u_d.*
2. *Le sous-mot v de t est dit* **irréductible dans** *t si v est élémentairement irréductible dans tout mot dérivé de t.*
3. *Le sous-mot v de t est dit* **irréductible à gauche (respectivement à droite) dans** *t si v est irréductible dans $u_g \cdot v$ (respectivement dans $v \cdot u_d$).*
4. *Le sous-mot v de t est dit* **fortement irréductible à gauche (respectivement à droite) dans** *t si pour tout mot $\bar{u}$, v est irréductible dans $\bar{u} \cdot u_g \cdot v$ (respectivement dans $v \cdot u_d \cdot \bar{u}$).*
5. *Un mot w_t, est dit* **sortie de t (après sa normalisation)**, *si $\downarrow(t) = w_t \cdot ||||$, où $||||$ est un suffixe fortement irréductible à gauche (maximal) de $\downarrow(t)$. L'ensemble de toutes les sorties possibles est noté $\mathcal{SR}$.*

Remarque 3.1 *1. Cette définition se recoupe avec celle de partie active de Dershowitz-Hoot. De fait Les sorties d'un redex interne est partie active de tout mot qui contient ce redex interne une fois celui-ci normalisé.*

2. Nous utiliserons souvent le fait que cette sortie est une entrée *pour la suite de la normalisation d'un terme dont t est un suffixe, i.e. :*

$$Si \quad s = v \cdot t \quad alors \quad \lambda(s) = \lambda(t) + \lambda(v \cdot w_t)\ .$$

[5] Nous donnons la définition de sorties pour des systèmes de réécriture de mots, la définition pour les STR est analogue.

Definition 3.3 (SRT à Sorties de Bornées) *Un SRT est dit* **à sorties bornées** *s'il existe un entier qui borne la taille de toutes les sorties possibles.*

Théorème 3.1 *Un SRTO non effaçant[6], de multiplicité un, à sorties bornées, et linéaire pour les redex internes est linéaire.*

Preuve Soit $a \in \boldsymbol{N}$ le facteur de linéarité des redex internes. Soit $b \in \boldsymbol{N}$ la borne des sorties.

Si $t = u_k \cdots u_0$ est un mot[7] tel que, pour chaque $i \leq k$, le mot $u_i \cdot w_{u_{i-1} \cdots u_0}$ est un redex interne. Alors :

$$\begin{aligned}
\lambda(t) &= \sum_{i=0}^{i=k} \lambda\left(u_i \cdot w_{u_{i-1} \cdots u_0}\right) \\
&= \sum_{i=0}^{i=k} a \cdot long\left(u_i \cdot w_{u_{i-1} \cdots u_0}\right) \\
&= a \cdot long(u_0) + \sum_{i=1}^{i=k} a \cdot (long(u_i) + b) \\
&= a \cdot (long(t) + k \cdot b) \\
&\leq a \cdot (1 + b) \cdot long(t)
\end{aligned}$$

□

Remarque 3.2 *Soit, $\mathcal{R}$, un SRTO non effaçant, de multiplicité un. A partir de la preuve du théorème 3.1, on peut établir que :*

$$\begin{aligned}
((\quad \forall v \in \mathcal{RI},\ \lambda(v) \leq a \cdot long(v)) \quad &\wedge \quad (\forall w \in \mathcal{SR},\ \forall u \cdot w \in \mathcal{RI},\ \lambda(u \cdot w) \leq a \cdot long(u))) \\
&\Rightarrow \quad \forall t,\ \lambda(t) \leq a \cdot long(t)\ .
\end{aligned}$$

4 Redex Internes de $\mathcal{Z}$

Dans cette section nous étudions la symétrie de $\mathcal{Z}$. Nous montrons aussi que les redex internes de $\mathcal{Z}$ sont de la forme : $(00) \cdot 1^{2k'_1} \cdot 0 \cdot 1^{2k'_2} \cdots 0 \cdot 1^{2k'_m}$, et la linéarité de $\mathcal{Z}$ pour ces redex internes.

4.1 Symétrie de $\mathcal{Z}$

Definition 4.1 *Soit t un mot de $\{0,1\}^*$, le* symetrique *de t, noté $\bar{t}$, est défini inductivement par :*

- $\bar{\Lambda} = \Lambda$,
- $\overline{(0 \cdot v)} = \bar{v} \cdot 1$ *et*
- $\overline{(1 \cdot v)} = \bar{v} \cdot 0$.

Lemme 4.1

$$\forall t \quad \lambda(t) = \lambda(\bar{t})\,.$$

[6] Le théorème reste vrai si on omet cette condition, voir [10].

[7] Nous donnons la preuve pour des systèmes de réécriture de mots, la preuve pour les STR est analogue.

Preuve Ce lemme découle facilement du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} u \cdot (0011) \cdot v \arrow[r] \arrow[d, "sym"'] & u \cdot (111000) \cdot v \arrow[d, "sym"] \\ \bar{v}(0011)\bar{u} \arrow[r] & \bar{v}(111000)\bar{u} \end{tikzcd}$$

□

4.2 Zéros irréductibles à droite

Soient k, k', n des entiers naturels non nuls et t un mot tel que :

$$\begin{aligned} t &= w \cdot 1^k \cdot 0^{2n+1} \cdot 1^{k'} \cdot w' \\ &= w \cdot 1^k \cdot [0] \cdot 0^{2n} \cdot 1^{k'} \cdot w' \end{aligned}$$

alors [0] est **irréductible à droite** puisque, pour tout terme t' dérivé de $[0] \cdot 0^{2n} \cdot 1^{k'} \cdot w'$, aucun redex de t' ne contient [0].

Par contre des réductions dans $w \cdot 1^k \cdot [0]$ peuvent conduire à un terme dérivé de t dans lequel [0] puisse être réduit. Exemple :

$$\begin{aligned} 0011[0](0011) &\longrightarrow (0011)[0]111000 \\ &\longrightarrow 11100(0[0]11)1000 \\ &\longrightarrow 111001110001000 \end{aligned}$$

Mais si $k > 1$ et si $t = w \cdot 0^k \cdot w'$ avec $0^k \cdot w'$ normal, alors $0^k \cdot w'$ demeure irréductible dans tout mot dérivé de t.

4.3 Uns irréductibles à gauche

Soient k, k', n des entiers naturels non nuls et t un mot tel que :

$$\begin{aligned} t &= w \cdot 0^k \cdot 1^{2n+1} \cdot 0^{k'} \cdot w' \\ &= w \cdot 0^k \cdot 1^{2n} \cdot [1] \cdot 0^{k'} \cdot w' \end{aligned}$$

alors [1] est **irréductible à gauche** puisque, pour tout mot t' dérivé de $w \cdot 0^k \cdot 1^{2n} \cdot [1]$, aucun redex de t' ne contient [1].

Par contre des réductions de $[1] \cdot 0^{k'} \cdot w'$ peuvent conduire à un mot dérivé de t dans lequel [1] puisse être réduit. Exemple :

$$\begin{aligned} 0011[1](0011) &\longrightarrow (0011)[1]111000 \\ &\longrightarrow 1110(00[1]1)11000 \\ &\longrightarrow 111011100011000 \end{aligned}$$

Donc si $[1] \cdot 0^{k'} \cdot w'$ est normal alors [1] demeure irréductible dans tout mot dérivé de t.

4.4 Marqueurs et preuves inductives

Soient k, k', n, m des entiers naturels non nuls et t un mot tel que :

$$\begin{aligned} t &= w \cdot 0^k \cdot 1^{2n+1} \cdot 0^{2m+1} \cdot 1^{k'} \cdot w' \\ &= w \cdot 0^k \cdot 1^{2n} \cdot [1][0] \cdot 0^{2m} \cdot 1^{k'} \cdot w' \end{aligned}$$

L'irréductibilité à gauche de [1] et à droite de [0] font que [1][0] partitionne t en deux mots indépendants par rapport à la réduction. On dira que [1][0] est un **marqueur**. On notera ce marqueur [10].

La détection de marqueurs est très utile pour obtenir des preuves inductives de terminaison. Le schéma de preuve consistera à obtenir, à partir d'un mot t, un mot dérivé t' qui contienne un marqueur partitionnant t' en deux mots "plus simples", c'est à dire dont on sait déjà prouver la terminaison.

4.5 Forme des redex internes

Nous allons identifier la forme des mots avec un seul redex dont il faut prouver la normalisation interne.

Soit $t = 0011w$ avec w mot normal. Si $w = u \cdot 0^k \cdot u'$ avec $k > 1$ alors le sous-mot $0^k \cdot u'$ est irréductible, comme on l'a vu dans la section sur les zéros irréductibles à droite. Si t est de la forme:

$$t = (00) \cdot (11)^{k_0} \cdot 0 \cdot 1^{k_1} \cdots 0 \cdot 1^{k_n} \cdot 0^k \cdot u'$$

avec $k > 1$, alors toute dérivation de t est une dérivation de:

$$(00) \cdot (11)^{k_0} \cdot 0 \cdot 1^{k_1} \cdots 0 \cdot 1^{k_n}.$$

Si pour tout $i < m$, k_i est paire et k_m est impaire, alors dans:

$$(00) \cdot (11)^{k_0} \cdot 0 \cdot 1^{2k'_1} \cdots 0 \cdot 1^{2k'_m} \cdot 1 \cdot 0 \cdot 1^{k_{m+1}} \cdots 0 \cdot 1^{k_n},$$

le sous-mot $1 \cdot 0 \cdot 1^{k_{m+1}} \cdots 0 \cdot 1^{k_n}$ est irréductible, comme on l'a vu dans la section sur les uns irréductibles à gauche.

Ces deux dernières remarques nous permettent de conclure que toute dérivation d'un mot avec un seul redex, de la forme $(00) \cdot 11w$, est une dérivation d'un sous-mot préfixe de la forme:

$$(00) \cdot 1^{2k'_1} \cdot 0 \cdot 1^{2k'_2} \cdots 0 \cdot 1^{2k'_m} \quad (\diamond)$$

Il est donc clair que pour prouver *I.N.* il suffit de prouver la normalisation interne des mots de la forme $\diamond$.

4.6 Normalisation interne

Dans cette sous-section nous donnons une preuve par induction de la normalisation interne des mots de la forme $\diamond$.

Notation 4.1 *Dans la suite || denote la concatenation d'un mot irréductible, $\lambda(t)$ dénote la longueur de dérivation (interne) qui normalise t, $long(t)$ désigne la longueur du mot t.*

Lemme 4.2 *Soit $k \geq 0$ et t_k un mot de la forme:*

$$t_k = (00) \cdot \underbrace{11100}_{1} \cdot \underbrace{11100}_{2} \cdots \underbrace{11100}_{k} \cdot \overbrace{111111011} ||$$

Alors :

$$\lambda(t_k) = 5k + 5$$

Preuve

$$\begin{aligned}
t_k &= (00)\cdot\underbrace{11100}_{1}\cdots\underbrace{11100}_{k-1}\cdot\underbrace{111(00}_{k}\cdot\overbrace{11)1111011}\| \\
&\longrightarrow (00)\cdot\underbrace{11100}_{1}\cdots\underbrace{11100}_{k-1}\cdot 111111\cdot 0(0011)11011\| \\
&\longrightarrow (00)\cdot\underbrace{11100}_{1}\cdots\underbrace{11100}_{k-1}\cdot 111111\cdot 01110(0011)011\| \\
&\longrightarrow (00)\cdot\underbrace{11100}_{1}\cdots\underbrace{11100}_{k-1}\cdot 111111\cdot 0111011100(0011)\| \\
&\longrightarrow (00)\cdot\underbrace{11100}_{1}\cdots\underbrace{11100}_{k-1}\cdot 111111\cdot 01110111(0011)1000\| \\
&\longrightarrow (00)\cdot\underbrace{11100}_{1}\cdots\underbrace{11100}_{k-1}\cdot 111111\cdot 0111011111110001000\| \\
&= (00)\cdot\underbrace{11100}_{1}\cdots\underbrace{11100}_{k-1}\cdot\overbrace{111111011}[10]1111110001000\|
\end{aligned}$$

Puisque [10] est un marqueur et que le mot à sa droite est normale on a :

$$\lambda(t_0) = 5 \quad \text{et} \quad \forall k,\quad \lambda(t_{k+1}) = 5 + \lambda(t_k)$$

$\square$

Fait 4.1 *Soit $k \geq 0$ et t_k un mot de la forme :*

$$u_{k+2} = (00)\cdot\underbrace{11100}_{1}\cdots\underbrace{11100}_{k}\cdots\underbrace{11100}_{k+1}\cdot\underbrace{11100}_{k+2}\cdot\overbrace{11}\|$$

Alors :

$$\lambda(u_{k+2}) = 5k + 9$$

Preuve

$$\begin{aligned}
u_{k+2} &= (00)\cdot\underbrace{11100}_{1}\cdots\underbrace{11100}_{k}\underbrace{11100}_{k+1}\cdot\underbrace{111(00}_{k+2}\cdot\overbrace{11)}\| \\
&\longrightarrow (00)\cdot\underbrace{11100}_{1}\cdots\underbrace{11100}_{k}\underbrace{111(00}_{k+1}\cdot 11)1111000\| \\
&\longrightarrow (00)\cdot\underbrace{11100}_{1}\cdots\underbrace{11100}_{k}1111110(0011)11000\| \\
&\longrightarrow (00)\cdot\underbrace{11100}_{1}\cdots\underbrace{11100}_{k}11111101110(0011)000\| \\
&\longrightarrow (00)\cdot\underbrace{11100}_{1}\cdots\underbrace{11100}_{k}111111011[10]111000000\|
\end{aligned}$$

Le terme à droite du marqueur [10] est normal, et par le lemme 4.2 le terme à gauche de [10] se normalise après $5(k+1)$ pas. Donc : $\lambda(u_k) = 5k + 9$. $\square$

Fait 4.2 $\lambda\left((00)\cdot\underbrace{11100}_{1}\cdot\overbrace{11}\|\right) = 4.$

Lemme 4.3 *Soit $k \geq 0$ et v_k un mot de la forme :* $v_k = (00)\cdot\underbrace{11100}_{1}\cdots\underbrace{11100}_{k}\cdot\overbrace{11}\,||$ *Alors :*

$$\lambda(v_k) = 5(k+1)$$

Preuve Il suffit de joindre les résultats des deux derniers faits. $\square$.

Proposition 4.1 *Z vérifie la terminaison interne*

Preuve Pour prouver la normalisation interne, notée $N.I.$ il suffit de prouver que chaque mot contenant un seul redex est normalisable. Or d'après la section sur les marqueurs l'étude de la normalisation interne de mots avec un seul redex se réduit au cas défini par l'équation 4.5 :

$$(00)\cdot 1^{2k_1}\cdot 0\cdot 1^{2k_2}\cdots 0\cdot 1^{2k_m}||(\diamondsuit)$$

Nous allons prouver la $N.I.$ par induction lexicographique sur les paires (m, k_1) des termes de la forme $(\diamondsuit)$. On notera cette paire (m_t, k_t).

Pas initial. Le $m = 1$ est trivial.
Pas inductif Si $m > 1$ On suppose que :

$$\forall t \in (\diamondsuit), \quad (m_t, k_t) <_{lex} (m, k) \Rightarrow t \ \ satisfait \ \ N.I.$$

Soit alors un mot t tel que $(m_t, k_t) = (m, k)$ avec t de la forme :

$$k_{j+1} > 1 \quad et \quad t = (00)\cdot\underbrace{110}_{1}\cdots\underbrace{110}_{j}\cdot\overbrace{(11)^{k_{j+1}}0}\cdots\overbrace{(11)^{k_{m-1}}0}\,11||$$

Nous allons considérer deux cas :
Si $j = 0$. Alors :

$$\begin{aligned} t &= (00)\cdot\overbrace{(11)^{k_1}0}\cdots\overbrace{(11)^{k_{m-1}}0}\,11|| \\ &\longrightarrow 11[10]00\,\overbrace{(11)^{k_1-1}0}\cdots\overbrace{(11)^{k_{m-1}}0}\,11|| \end{aligned}$$

Le mot à la droite du marqueur [10] a pour paire $(m, k_1 - 1)$, or $(m, k_1 - 1) <_{lex} (m, k)$, donc par hypothèse il est $I.N.$. Donc t est $I.N.$

Si $j > 0$. Alors :

$$\begin{aligned} t &= (00)\cdot\underbrace{110}_{1}\cdots\underbrace{110}_{j}\cdot\overbrace{(11)^{k_{j+1}}0}\cdots\overbrace{(11)^{k_{m-1}}0}\,11|| \\ &\stackrel{j+1}{\longrightarrow} \underbrace{11100}_{1}\cdots\underbrace{11100}_{j}\cdot\overbrace{11}\,[10]00\,\overbrace{(11)^{k_{j+1}-1}0}\cdots\overbrace{(11)^{k_{m-1}}0}\,11|| \end{aligned}$$

où $\stackrel{j+1}{\longrightarrow}$ désigne $j+1$ applications de réductions internes. Le mot à gauche du marqueur: $\underbrace{11100}_{1}\cdots\underbrace{11100}_{j}\cdot\overbrace{11}$ est $I.N.$ par le lemme 4.3. Le mot à droite du marqueur :

$00\,\overbrace{(11)^{k_{j+1}-1}0}\cdots\overbrace{(11)^{k_{m-1}}0}\,11||$ est $I.N$ puisque $(m-j, k_{j+1}-1) <_{lex} (m, k)$. Donc t est $I.N.$

$\square$.

4.7 Linéarité pour des redex internes

Dans cette sous-section nous donnons, à partir de la preuve de normalisation interne, une preuve de la linéarité pour des redex internes.

Proposition 4.2 *Tout terme t de la forme* $(00)\cdot 1^{2k_1}\cdot 0\cdot 1^{2k_2}\cdots 0\cdot 1^{2k_m}||(\Diamond)$ *satisfait :*

$$\lambda(t) < 2\cdot long(t) - 6$$

Preuve Nous allons prouver la proposition par induction lexicographique sur les paires (m, k_1) des termes de la forme $(\Diamond)$. On notera cette paire (m_t, k_t).

Cas de base Si $m = 1$ $\lambda((00)(11)^k) = k- < 2\cdot(2(k+1)) - 6$.
Pas inductif On suppose que:

$$\forall t \in (\Diamond),\quad (m_t, k_t) <_{lex} (m, k) \Rightarrow \lambda(t) < 2\cdot long(t) - 6$$

Soit alors un mot t tel que $(m_t, k_t) = (m, k)$ avec t de la forme:

$$k_{j+1} > 1 \quad et \quad t = (00)\cdot \underbrace{110}_{1}\cdots\underbrace{110}_{j}\cdot\overbrace{(11)^{k_{j+1}}0}\cdots\overbrace{(11)^{k_m-1}0}\,11||$$

Nous allons considérer deux cas:
Si $j = 0$. Alors d'aprés la preuve de normalisation interne on a:

$$\begin{aligned}\lambda(t) &= 1 + \lambda(00\,\overbrace{(11)^{k_1-1}0}\cdots\overbrace{(11)^{k_m-1}0}\,11||)\\ &< 1 + 2(l(t) - 2h) - 6 \quad (H.I.)\\ &= 2l(t) - 9\end{aligned}$$

Si $j > 0$. Alors d'après la preuve de normalisation interne on a:

$$\begin{aligned}\lambda(t) &= (j+1) + \lambda(\underbrace{11100}_{1}\cdots\underbrace{11100}_{j}\cdot\overbrace{11}\,) +\\ &\quad \lambda(00\,\underbrace{(11)^{k_{j+1}-1}0}\cdots\underbrace{(11)^{k_m-1}0}\,11||)\\ &< (j+1) + [5(j-1)] + [2(l(t) - 3j - 1) - 6]\\ &= 2l(t) - 12\end{aligned}$$

L'inégalité ci-dessus découle du lemme 4.3 et de l'hypothèse inductive.

$\square$

5 Sorties et linéarité de $\mathcal{Z}$

Nous donnons dans le tableau 1 les différentes sorties possibles pour les mots de la forme $(00)\cdot 1^{2k'_1}\cdot 0\cdot 1^{2k'_2}\cdots 0\cdot 1^{2k'_m}$. La preuve de tel tableau est faite dans le lemme 5.2.

Notation 5.1 *Nous noterons :*

$$S_k = \underbrace{11}_{1}\cdot 0\cdot\underbrace{11}_{2}\cdots 0\cdot\underbrace{11}_{k} \quad et \quad T_k = \underbrace{111}_{1}\cdot 0\cdot\underbrace{111}_{2}\cdots 0\cdot\underbrace{111}_{k}$$

Lemme 5.1

$$\forall t \in (\Diamond) \quad t = 0011011\cdot u \Rightarrow \downarrow(t) \in \{111111||||, 111111011||||\}$$

Table1. Tableau de sorties

k_1	k_2	k_3	Sorties	Lemme - Cas
1	0		111	5.2-1
	1	0	$(11)^3$	5.1-1
	1	>0	$(11)^3011$	5.1-2
	>1		$(11)^3$	5.1-3
2	0		111011	5.2-3
	1	0	$1110(11)^3$	5.2-4
	1	>0	$1110(11)^3011$	5.2-5
	>1		$1110(11)^3$	5.2-6
>2			111011	5.2-7

Preuve Nous considérons trois cas :

1. Si $t = 0011011||$:

$$\begin{aligned} t &= (0011)011|| \\ &\longrightarrow 11100(0011)|| \\ &\longrightarrow 111(0011)1000|| \\ &\longrightarrow 111111[0001000|| \\ &\longrightarrow 111111|||| \end{aligned}$$

2. Si $t = 00110110(11)^{k_3}0\cdots$ avec $k_3 > 0$:

$$\begin{aligned} t &= (0011)0110(11)^{k_3}0\cdots \\ &\longrightarrow 11100(0011)0(11)^{k_3}0\cdots \\ &\longrightarrow 111(0011)10000(11)^{k_3}0\cdots \\ &\longrightarrow 111111000100(0011)(11)^{k_3-1}0\cdots \\ &\longrightarrow 1111110001(0011)1000(11)^{k_3-1}0\cdots \\ &\longrightarrow 1111110(0011)110001000(11)^{k_3-1}0\cdots \\ &\longrightarrow 111111011[10]00110001000(11)^{k_3-1}0\cdots \\ &\xrightarrow{*} 111111011|||| \end{aligned}$$

Car si $v = [10]\cdot \downarrow (00110001000(11)^{k_3-1}0\cdots)$ alors pour tout mot w, le mot v est irréductible dans le mot $w \cdot 111111011 \cdot v$.

3. Si $t = 00110(11)^{k_2}0\cdots$ avec $k_2 > 1$:

$$\begin{aligned} t &= (0011)0(11)^{k_2}0\cdots \\ &\longrightarrow 11100(0011)(11)^{k_2-1}0\cdots \\ &\longrightarrow 111(0011)1000(11)^{k_2-1}0\cdots \\ &\longrightarrow 111111[0001000(11)^{k_2-1}0\cdots \\ &\longrightarrow 111111|||| \end{aligned}$$

Car si $v = [0\cdot \downarrow (00[10]00(11)^{k_2-1}0\cdots)$ alors pour tout mot w, le mot v est irréductible dans le mot $w \cdot 111111 \cdot v$.

□

Lemme 5.2 *Soit* $t = (00)\cdot(11)^{k_1}\cdot 0\cdot(11)^{k_2}\cdots 0\cdot(11)^{k_j}||||$. *Alors le tableau de sorties 1 est satisfait.*

Preuve Nous allons prouver les cas :

1. Si $k_1 = 1$ et $k_2 = 0$. Il est clair $\downarrow (t) = 111||||$.
2. [Si $k_1 = 1$ et $k_2 > 0$] Voir le lemme 5.1
3. Si $k_1 = 2$ et $k_2 = 0$, alors :

$$\downarrow ((00) \cdot (11)^2||||) = 1110111000|||| = 111 \cdot 0 \cdot 11||||$$

4. Si $k_1 = 2$, $k_2 = 1$ et $k_3 = 0$, alors, d'aprés le cas 1 du lemme 5.1, on a :

$$\begin{aligned} 00 \cdot (11)^2 \cdot 0 \cdot (11)|||| &\longrightarrow 1110(0011011)|||| \\ &\xrightarrow{*} 1110111111|||| \end{aligned}$$

5. Si $k_1 = 2$, $k_2 = 1$ et $k_3 > 0$, alors, d'aprés le cas 2 du lemme 5.1, on a :

$$\begin{aligned} 00 \cdot (11)^2 \cdot 0 \cdot (11) \cdot 0 \cdot 11 \cdot u &\longrightarrow 1110(0011011 \cdot 0 \cdot 11) \cdot u \\ &\xrightarrow{*} 1110111111011|||| \end{aligned}$$

6. Si $k_1 = 2$ et $k_2 > 0$, alors la sortie est $1110(11)^3$, puisque :

$$\begin{aligned} 00 \cdot (11)^2 \cdot 0 \cdot (11)^{k_2} \cdot u &\longrightarrow 1110(0011)0(11)^{k_2} \cdot u \\ &\longrightarrow 11101110000(11)^{k_2} \cdot u \\ &\longrightarrow 111011100111000(11)^{k_2-1} \cdot u \\ &\longrightarrow 11101111110001000(11)^{k_2-1} \cdot u \\ &\longrightarrow 1110111111000[10]00(11)^{k_2-1} \cdot u \end{aligned}$$

7. Si $k_1 > 2$, alors la sortie est 111011, puisque :

$$\downarrow ((00) \cdot (11)^{k_1} \cdot 0 \cdots) = T_{k_1}|||| = 111 \cdot 0 \cdot 11[10111 \cdots]$$

□

Corollaire 5.1 *Le système Z est linéaire.*

Preuve Le lemme des sorties, 5.2, montre que la taille des sorties est bornée. Donc la linéarité est satisfaite par le théorème 3.1, puisque, par la proposition 4.2, la linéarité interne est satisfaite. □

6 Conjecture de Zantema

Dans cette section on exhibe une suite de mots, s_n, tel que $\forall n$, $\lambda(s_n) < 2 \cdot long(s_n)$ et $\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda(t_n)}{l(t_n)} = 2$. Donc la conjecture forte de Zantema est le meilleur raffinement possible de la linéarité de $\mathcal{Z}$.

Proposition 6.1 *Pour tout terme* $s_k = 00 \cdot \underbrace{11}_{1} \cdot 0 \cdot \underbrace{11}_{2} \cdots 0 \cdot \underbrace{11}_{k} ||$ *Nous avons:*

$$\lambda(s_k) < 2 \cdot long(s_k) - 6$$

Preuve Si $k \leq 2$ il est facile de voir que l'équation 6.1 est satisfaite.

Nous allons prouver la proposition pour $k > 2$. Nous rappelons la notation et le resultat du fait 4.1; à savoir que $\lambda(u_{k+2}) = 5k + 9$ où :

$$u_{k+2} = (00) \cdot \underbrace{11100}_{1} \cdots \underbrace{11100}_{k} \cdots \underbrace{11100}_{k+1} \cdot \underbrace{11100}_{k+2} \cdot \overbrace{11} \, || \, .$$

En effet :

$$\begin{aligned} s_k &= 00 \cdot \underbrace{11}_{1} \cdot 0 \cdot \underbrace{11}_{2} \cdots \cdot 0 \cdot \underbrace{11}_{k} || \\ &\xrightarrow{k} \underbrace{111}_{1} \cdot 00 \cdot \underbrace{111}_{2} \cdots \cdot 00 \cdot \underbrace{111}_{k} \cdot 000|| \\ &= 111]u_{k-2}[100|| \end{aligned}$$

Donc

$$\lambda(s_k) = k + \lambda(u_{k-2}) = 6k - 11 < 2 \cdot long(s_k) - 6$$

□

Proposition 6.2 *Il existe une suite de mots $(t_n)_{n \in N}$ tel que :*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\lambda(t_n)}{l(t_n)} = 2$$

Preuve Soit la suite de mots :

$$s_n = (00) \underbrace{110}_{1} \cdots \underbrace{110}_{n} \overbrace{11}$$

On a vu dans la preuve de la proposition 6.1 que, pour $n > 2$, $\lambda(s_n) = 6n - 11$ Donc :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\lambda(s_n)}{l(s_n)} = \lim_{n \to \infty} \frac{(6n - 11)}{(3n + 4)} = 2$$

□.

Remarque Les propositions 6.1 et 6.2 prouvent que le facteur 2 est optimal.

Remarque 6.1 *On ne peut prouver la conjecture forte de Zantema par linéarité des redex internes, et par la remarque 3.2. Puisque, pour la sortie* $1110(11)^3 \cdot 011$, *nous avons :*

$$2 \cdot long(001) < 8 = \lambda((001) \cdot \underbrace{1110(11)^3 \cdot 011}) < 3 \cdot long(001)$$

Par contre, on peut prouver par cette technique que le facteur de linéarité de $\mathcal{Z}$ est inférieure ou égale à 3.

7 Lemmes de Dichotomies

Puisque, d'après la remarque 6.1, on ne peut prouver la conjecture forte de Zantema par la linéarité pour des redex internes, nous allons utiliser des techniques de *dichotomisation par marquage en avant.* Nous donnons dans cette section deux lemmes de dichotomies.

Lemme 7.1 (Grande Dichotomie) *Soient v et w deux mots quelconques. Soit $k_j > 1$ et le mot $t = v \cdot (00)^h \cdot (11)^{k_1} \cdot 0 \cdots (11)^{k_j} \cdot w$, tel que $(h, j) \neq (1,1)$ ou bien v est le mot vide, alors :*

$$\begin{aligned} & \lambda \left(v \cdot (00)^h \cdot (11)^{k_1} \cdot 0 \cdots (11)^{k_j} \cdot w\right) \\ = \; & \lambda \left(v \cdot (00)^h \cdot (11)^{k_1} \cdot 0 \cdots (11)^{k_{j-1}} 011\right) + \lambda(00 \cdot (11)^{k_j - 1} \cdot w) \\ = \; & \lambda \left(v \cdot (00)^h \cdot (11)^{k_1} \cdot 0 \cdots (11)^{k_{j-1}} 011\right) + (k_j - 1) + \lambda(000 \cdot w) \end{aligned}$$

Preuve Nous utilisons la mots T_k tel que définis dans la section 5 Alors :

$$\begin{aligned} & v \cdot (00)^h \cdot (11)^{k_1} \cdot 0 \cdot (11)^{k_2} \cdots (11)^{k_j} \cdot w \\ \xrightarrow{k_1} \; & v \cdot (00)^{h-1} T_{k_1} \cdot 0000 \cdot (11)^{k_2} \cdots (11)^{k_j} \cdot w \\ \xrightarrow{k_2 + \ldots + k_{j-1}} \; & v \cdot (00)^{h-1} T_{k_1} \cdot 00 \cdot T_{k_2} \cdots 00 \cdot T_{k_{j-1}} \cdot 0000 \cdot (11)^{k_j} \cdot w \\ \longrightarrow \; & v \cdot (00)^{h-1} T_{k_1} \cdot 00 \cdot T_{k_2} \cdots 00 \cdot T_{k_{j-1}} \cdot 0011[10]00 \cdot (11)^{k_j - 1} \cdot w \end{aligned}$$

Si $(h, j) \neq (1,1)$ ou bien v est le mot vide, alors [10] est un marqueur, donc :

$$\begin{aligned} & \lambda \left(v \cdot (00)^h \cdot (11)^{k_1} \cdot 0 \cdots (11)^{k_j} \cdot w\right) \\ = \; & 1 + \sum_{i=1}^{j-1} k_i + \lambda \left(v \cdot (00)^{h-1} T_{k_1} \cdot 00 \cdot T_{k_2} \cdots 00 \cdot T_{k_{j-1}} \cdot 0011\right) + \lambda(00 \cdot (11)^{k_j - 1} \cdot w) \\ = \; & \lambda \left(v \cdot (00)^h \cdot (11)^{k_1} \cdot 0 \cdots (11)^{k_{j-1}} 011\right) + \lambda \left(00 \cdot (11)^{k_j - 1} \cdot w\right) \end{aligned}$$

□

Lemme 7.2 (Petite Dichotomie) *Soit $k > 2$ et soit le mot S_k tel que défini dans la section 5, alors :*

$$\lambda \left((00)^h \cdot S_k \cdot v\right) = \lambda \left((00)^h \cdot S_k\right) + \lambda (000 \cdot v) .$$

Preuve On a bien :

$$\begin{aligned} (00)^h \cdot S_k \cdot v \xrightarrow{k} \; & (00)^{h-1} \cdot T_k \cdot 000 \cdot v \\ = \; & (00)^{h-1} \cdot \underbrace{111}_{1} \cdot 0 \cdot \underbrace{11[1 \cdot 0]}_{2} \cdot \underbrace{111}_{3} \cdots \underbrace{111}_{k} \cdot 000 \cdot v \end{aligned}$$

Puisque le mot $\underbrace{111}_{3} \cdots \underbrace{111}_{k}$ est irréductible dans le mot $\underbrace{111}_{3} \cdots \underbrace{111}_{k} \cdot 000 \cdot v$, nous avons :

$$\begin{aligned} \lambda \left((00)^h \cdot S_k \cdot v\right) & = k + \lambda \left((00)^{h-1} \cdot 111011\right) + \lambda (000 \cdot v) \\ & = \lambda \left((00)^h \cdot S_k\right) + \lambda (000 \cdot v) . \end{aligned}$$

□

8 Preuve de la Conjecture de Zantema

On montre dans cette section que :

$$\forall t, \quad \lambda(t) < 2 \cdot long(t) - 6 .$$

Proposition 8.1 *Tout mot t, vérifie :*

$$(\forall t', \quad long(t') < long(t) \Rightarrow \lambda(t') < 2 \cdot long(t') - 6) \quad \Rightarrow \quad (\lambda(t) < 2 \cdot long(t) - 6)$$

Preuve Par induction sur la longueur de t.

1. Si le mot t est de longueur 0, il vérifie trivialement I.
2. Si $t = ||||t'$ avec $t \neq t'$, alors :

$$\lambda(t) = \lambda(t') \overset{H.I.}{<} 2 \cdot long(t') - 6 < 2 \cdot long(t) - 6.$$

3. Si $t \neq ||||t'$ avec $t \neq t'$ alors $\bar{t} \neq \bar{t'}||||$ avec $\bar{t} \neq \bar{t'}$, or, d'après ($\diamond$) :

$$\bar{t} = v \cdot 00(11)^{k_1}0(11)^{k_2}\cdots 0(11)^{k_m}||||,$$

donc

$$\bar{t} = v \cdot 00(11)^{k_1}0(11)^{k_2}\cdots 0(11)^{k_m}, \quad \text{et} \quad t = (00)^{k_m}1\cdots(00)^{k_1}11 \cdot \bar{v}.$$

(a) Si $\bar{t}$ vérifie les conditions du lemme, 7.1, de grande dichotomie, à savoir :
Ou bien $\exists i > 1\ k_i > 1$,
Ou bien $\forall i > 1\ k_i = 1,\ k_1 > 1,$ et $(v = v' \cdot 00,$ ou $v = \emptyset)$,
alors par le lemme, 7.1, de grande dichotomie :

$$\begin{aligned}
\lambda(t) &= \lambda(\bar{t}) \\
&= \lambda\left(v \cdot 00(11)^{k_1}0(11)^{k_2}\cdots 0(11)^{k_m}\right) \\
&= \lambda\left(v \cdot 00(11)^{k_1}0(11)^{k_2}\cdots(11)^{k_i-1}011\right) + \lambda\left(00(11)^{k_i-1}\cdots 0(11)^{k_m}\right) \\
&\overset{H.I.}{<} 2 \cdot long(t) - 12 + 2 \times 2 \\
&= 2 \cdot long(t) - 8
\end{aligned}$$

(b) Si $\bar{t}$ ne vérifie pas les conditions du lemme, 7.1, de grande dichotomie :
  i. Ou bien $\forall i,\ k_i = 1$, donc $t = 001\cdots 0010011 \cdot \bar{v}$, voir lemme 8.2.
  ii. Ou bien $\forall i > 1\ k_i = 1,\ k_1 \geq 2,\ v \neq \emptyset$ et $\bar{v} \neq 11 \cdot \bar{v'}$, donc :
  Ou bien $k_1 > 1$ et $t = 001\cdots 001(00)^{k_1}11 \cdot 0 \cdot u$
  Ou bien $k_1 > 1$ et $t = 001\cdots 001(00)^{k_1}11 \cdot 10 \cdot u$.
  La preuve pour ces deux cas découle de celle des deux cas suivants :
  – Si $k_1 > 1$ et $t = 001\cdots 001(00)^{k_1}\underline{11}(00)^k \cdot 1 \cdot u'$, voir lemme 8.3.
  – Si $k_1 > 1$ et $t = 001\cdots 001(00)^{k_1}\underline{110}(00)^k \cdot 1 \cdot u'$, voir lemme 8.4

□

Corollaire 8.1

$$\forall t, \quad \lambda(t) < 2 \cdot long(t) - 6\ .$$

Preuve Induction sur la longueur des mots. □

Lemme 8.1

$$\forall v \quad \lambda\left((00)^3 \cdot v\right) \leq 1 + \lambda\left((00)^2 \cdot v\right).$$

Preuve

– Si $(00)^3$ est irréductible dans $(00)^3 \cdot v$ alors:

$$\lambda\left((00)^3 \cdot v\right) = \lambda(v) = \lambda\left((00)^2 \cdot v\right).$$

– Sinon :

$$\begin{aligned}(00)^3 \cdot v &\xrightarrow{n} (00)^3 11 \cdot t' \\ &\longrightarrow (00)^2 \cdot 111000 \cdot t' \\ &\longrightarrow (00) \cdot 111000 \cdot 1000 \cdot t' \\ &\longrightarrow [111000 \cdot 10]00 \cdot 1000 \cdot t'\end{aligned}$$

Donc :

$$\lambda\left((00)^3 \cdot v\right) = n + 3 + \lambda(00100 \cdot t')$$

De même :

$$\lambda\left((00)^2 \cdot v\right) = n + 2 + \lambda(00100 \cdot t')$$

□

Lemme 8.2 *Si* $t = \underbrace{001}_{m} \cdots \underbrace{001}_{1} \cdot 0011 \cdot \bar{v}$ *alors* t *vérifie* I.

Preuve

Si $m = 0$, donc $t = 0011 \cdot \bar{v} \longrightarrow 111000 \cdot \bar{v}$, d'où :

$$\begin{aligned}\lambda(t) &= 1 + \lambda(000 \cdot \bar{v}) \\ &\overset{H.I.}{<} 1 + 2 \cdot long(000 \cdot \bar{v}) - 6 \\ &< 2 \cdot long(t) - 6\end{aligned}$$

Si $m = 1$, $\lambda(t) = \lambda(\bar{t}) = \lambda(v \cdot 0011011)$, or :

$$\begin{aligned}v \cdot 0011011 &\longrightarrow v \cdot 111(00)^2 \cdot 11 \\ &\longrightarrow v \cdot 11100111000 \\ &\longrightarrow v \cdot (11)^3 \cdot 0001000\end{aligned}$$

donc par le lemme 8.1 et par hypothèse d'induction on a :

$$\begin{aligned}\lambda(t) &= 3 + \lambda\left(v \cdot (11)^3\right) \\ &= 4 + \lambda\left(v \cdot (11)^2\right) \\ &\overset{H.I.}{<} 4 + 2 \cdot long(v) + 8 - 6 \\ &= 2 \cdot long(v) + 6 \\ &= 2 \cdot long(t) - 8\end{aligned}$$

Si $m > 1$, $\lambda(t) = \lambda(\bar{t}) = \lambda(v \cdot 0011011011 \cdot 0 \cdot S_k)$, donc par le lemme, 7.2, de petite dichotomie :

$$\begin{aligned}\lambda(t) &= \lambda(v \cdot 0011011011 \cdot 0 \cdot S_k) \\ &= \lambda(v \cdot 00 \cdot S_3 \cdot 0 \cdot S_k) \\ &= \lambda(v \cdot 00 \cdot S_3) + \lambda(000 \cdot 0 \cdot S_k) \\ &\overset{H.I.}{=} 2 \cdot long(v \cdot 00 \cdot S_3) - 6 + 2 \cdot long(0 \cdot S_k) \\ &= 2 \cdot long(t) - 6\end{aligned}$$

□

Lemme 8.3 *Si* $k_1 > 1$ *et* $t = 001 \cdots 001(00)^{k_1} 11 \underbrace{(00)^k \cdot 1 \cdot u'}_{u}$, *alors* t *vérifie* I.

Preuve Puisque $t \longrightarrow 001\cdots001(00)^{k_1-1}11[10]00(00)^k \cdot 1 \cdot u'$, nous avons :

$$\begin{aligned}
\lambda(t) &= 1+\lambda\left(001\cdots001(00)^{k_1-1}11\right)+\lambda\left(00(00)^k \cdot 1 \cdot u'\right)\\
&\overset{H.I.}{<} 1+\left(2\cdot long\left(001\cdots001(00)^{k_1-1}11\right)-6\right)+\left(2\cdot long\left(00(00)^k\cdot 1\cdot u'\right)-6\right)\\
&= 1+\left(2\cdot long\left(001\cdots001(00)^{k_1}11\right)-4-6\right)+2\cdot long(u)+4-6\\
&= 1+2\cdot long(t)-12
\end{aligned}$$

□

Lemme 8.4 *Si $k_1 > 1$ et $t = 001\cdots001(00)^{k_1}11\underbrace{0(00)^k \cdot 1 \cdot u'}_{u}$, alors t vérifie I.*

Preuve Nous distinguons trois cas pour prouver ce lemme :

1. Si $k_1 > 2$ voir le lemme 8.5.
2. Si $k_1 = 2$ et $t = (00)^2 \cdot 110(00)^k \cdot 1 \cdot u'$, voir le lemme 8.6.
3. Si $k_1 = 2$, $m > 0$ et $t = \underbrace{001}_{m}\cdots\underbrace{001}_{1}(00)^{k_1}11\underbrace{0(00)^k \cdot 1 \cdot u'}_{u}$, voir le lemme 8.8.

□

Lemme 8.5 *Si $k_1 > 2$ et $t = 001\cdots001(00)^{k_1}11\underbrace{0(00)^k \cdot 1 \cdot u'}_{u}$, alors t vérifie I.*

Preuve Si $k_1 > 2$ et Puisque :

$$\begin{aligned}
t &\longrightarrow 001\cdots001(00)^{k_1-1}111(00)^{k+2}\cdot 1\cdot u'\\
t &\longrightarrow 001\cdots001(00)^{k_1-2}11[10]001(00)^{k+2}\cdot 1\cdot u'
\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}
\lambda(t) &= 2+\lambda\left(001\cdots001(00)^{k_1-2}11\right)+\lambda\left(001(00)^{k+2}\cdot 1\cdot u'\right)\\
&\overset{H.I.}{<} 2+\left(2\cdot long\left(001\cdots001(00)^{k_1-2}11\right)-6\right)+\left(2\cdot long\left(001(00)^{k+2}\cdot 1\cdot u'\right)-6\right)\\
&= 2+\left(2\cdot long\left(001\cdots001(00)^{k_1}11\right)-8-6\right)+\left(2\cdot long(u)+12-6\right)\\
&= 2\cdot long(t)-6
\end{aligned}$$

□

Lemme 8.6 *Si $t = (00)^2 \cdot 110(00)^k \cdot 1 \cdot u'$, alors t vérifie I.*

Preuve Puisque $\lambda(t) = \lambda\left((00)^2 \cdot 110 \cdot w_{(00)^k\cdot 1\cdot u'}\right) + \lambda\left((00)^k \cdot 1 \cdot u'\right)$, et comme $(00)^k \cdot 1 \cdot u'$ vérifie l'hypothèse inductive il suffit de prouver que :

$$\lambda\left((00)^2 \cdot 110 \cdot w_{(00)^k\cdot 1\cdot u'}\right) < \lambda\left((00)^2 \cdot 110\right) = 14 \ . \qquad (1)$$

où $w_{(00)^k\cdot 1\cdot u'}$ est la sortie de $(00)^k \cdot 1 \cdot u'$.

Deux cas se présentent :

Si $w_{(00)^k\cdot 1\cdot u'} = (00)^k \cdot u''$, c'est à dire $(00)^k$ est irréductible dans $(00)^k \cdot 1 \cdot u'$, alors $w_{(00)^k\cdot 1\cdot u'}$ est irréductible dans $(00)^2 \cdot 110 \cdot w_{(00)^k\cdot 1\cdot u'}$; donc :

$$\lambda\left((00)^2 \cdot 110 \cdot w_{(00)^k\cdot 1\cdot u'}\right) = \lambda\left((00)^2 \cdot 11||||\right) = 4 \ .$$

Sinon par monotonie de la réécriture par rapport à l'ordre préfixe il suffit de prouver l'inégalité 1 pour les sorties maximales, pour cet ordre, données dans le tableau des sorties. Ces sorties maximales sont $1110(11)^3 \cdot 011||||$ et $(11)^3 \cdot 011||||$.

Si $w_{(00)^k\cdot 1\cdot u'} = 1110(11)^3\cdot 011||||$, alors $\lambda\left((00)^2\cdot 110\cdot 1110(11)^3\cdot 011\right) = 6$; car $(00)^2\cdot 110\cdot 11[10](11)^3\cdot 011 = (00)^2\cdot 110\cdot 11||||$ et :

$$\begin{aligned}(00)^2\cdot 110\cdot 11 \longrightarrow \quad & 00111(00)^2\cdot 11 \longrightarrow 1110001(00)^2\cdot 11\\ &\xrightarrow{2} [1110]001111[0001000] \xrightarrow{2}\downarrow \left((00)^2\cdot 110\cdot 11\right)\end{aligned}$$

Si et $w_{(00)^k\cdot 1\cdot u'} = (11)^3\cdot 011$, alors :

$$\begin{aligned}(00)^2\cdot 110(11)^3\cdot 011 &\xrightarrow{2} 1110001(00)^2\cdot(11)^3\cdot 011\\ &\longrightarrow 1110001(00)11[10]00\cdot(11)^2\cdot 011\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}\lambda\left((00)^2\cdot 110(11)^3\cdot 011\right) &= 3+\lambda\left(1110001(00)11\right)+\lambda\left(00\cdot(11)^2\cdot 011\right)\\ &= 3+3+4 = 10\end{aligned}$$

$\square$

Lemme 8.7 $\forall m > 0 \quad \lambda\left(\underbrace{001}_{m}\cdots\underbrace{001}_{1}\cdot 111011\right) = 6m-2.$

Preuve Montrons d'abord que :

$$\lambda\left((00)^3\cdot 1(00)^2\cdot 11\underbrace{011}_{1}\cdots\underbrace{011}_{n}\right) = 6(n+1)\ .$$

En effet :

$$\begin{aligned}(00)^3\cdot 1(00)^2\cdot 11\underbrace{011}_{1}\cdots\underbrace{011}_{n} &\xrightarrow{2} (00)^3\cdot 11110001000\cdot\underbrace{011}_{1}\cdots\underbrace{011}_{n}\\ &\longrightarrow (00)^2\cdot 11[10]00110001000\cdot\underbrace{011}_{1}\cdots\underbrace{011}_{n}\\ &\longrightarrow (00)^2\cdot 11[10]1110000001000\cdot\underbrace{011}_{1}\cdots\underbrace{011}_{n}\\ &\xrightarrow{2} 1110111000[10]1110000001000\cdot\underbrace{011}_{1}\cdots\underbrace{011}_{n}\\ &= \ ||||(00)^3\cdot 1(00)^2\cdot 11\underbrace{011}_{1}\cdots\underbrace{011}_{n-1}\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\lambda\left(\underbrace{001}_{m}\cdots\underbrace{001}_{1}\cdot 111011\right) &= \lambda\left(001(00)^2\cdot 11\underbrace{011}_{1}\cdots\underbrace{011}_{m-1}\right)\\ &\overset{*}{=} 4+\lambda\left((00)^3\cdot 1(00)^2\cdot 11\underbrace{011}_{1}\cdots\underbrace{011}_{m-2}\right)\\ &= 4+6(n-1)\end{aligned}$$

L'égalité surindexée de $\star$ découle de :

$$\begin{aligned}
001(00)^2 \cdot 11 \underbrace{011}_{1} \cdots \underbrace{011}_{m-1} &\xrightarrow{2} 00(11)^2 0001000 \underbrace{011}_{1} \cdots \underbrace{011}_{m-1} \\
&\xrightarrow{2} 11101110000001000 \underbrace{011}_{1} \cdots \underbrace{011}_{m-1} \\
&= (00)^3 \cdot 1(00)^2 \cdot 11 \underbrace{011}_{1} \cdots \underbrace{011}_{m-2}
\end{aligned}$$

□

Lemme 8.8 *Si* $m > 0$ *et* $t = \underbrace{001}_{m} \cdots \underbrace{001}_{1}(00)^2 \cdot 11 \underbrace{0(00)^k \cdot 1 \cdot u'}_{u}$, *alors* t *vérifie* I.

Preuve Soit $w_{(00)^2 \cdot 110(00)^k \cdot 1 \cdot u'}$ la sortie de $(00)^2 \cdot 11 \underbrace{0(00)^k \cdot 1 \cdot u'}_{u}$, alors les trois conditions suivantes sont satisfaites :

- Par définition des sorties :

$$\lambda(t) = \lambda\left(\underbrace{001}_{m} \cdots \underbrace{001}_{1} w_{(00)^2 \cdot 110(00)^k \cdot 1 \cdot u'}\right) + \lambda\left((00)^2 \cdot 11 \underbrace{0(00)^k \cdot 1 \cdot u'}_{u}\right) ,$$

- D'après le lemme 8.9, $w_{(00)^2 \cdot 110(00)^k \cdot 1 \cdot u'} \in \{111, 111011\}$.
- Le mot $(00)^2 \cdot 11 \underbrace{0(00)^k \cdot 1 \cdot u'}_{u}$ vérifie l'hypothèse inductive.

Grâce à ces trois conditions, il suffit de prouver que :

$$\lambda\left(\underbrace{001}_{m} \cdots \underbrace{001}_{1} \cdot 111011\right) < 2 \cdot long\left(\underbrace{001}_{m} \cdots \underbrace{001}_{1}\right) = 6m. \qquad (2)$$

Or, d'après le lemme 8.7, $\lambda\left(\underbrace{001}_{m} \cdots \underbrace{001}_{1} \cdot 111011\right) = 6m-2$, donc l'équation 2 est satisfaite.

□

Lemme 8.9 $w_{(00)^2 \cdot 110(00)^k \cdot 1 \cdot u'} \in \{111, 111011\}$.

Preuve Nous considérons trois cas :

1. Si $k_1 = 1$ et $k_2 = 0$, alors la sortie est 111, puisque :

$$\downarrow ((00)^2 \cdot (11)||||) = 111 \cdot 000 \cdot 1000||||$$

2. Si $k_1 = 1$ et $k_2 > 0$, alors la sortie est 111011, puisque :

$$\begin{aligned}
(00)^2 \cdot 11 \cdot 0 \cdot 11 \cdot u &\xrightarrow{2} 111 \cdot 000 \cdot 1 \cdot 00(0011) \cdot u \\
&\longrightarrow 111 \cdot 000 \cdot 1 \cdot (0011)1 \cdot 000 \cdot u \\
&\longrightarrow 111 \cdot 0(0011)110001 \cdot 000 \cdot u \\
&\longrightarrow 111 \cdot 011[10]00110001 \cdot 000 \cdot u
\end{aligned}$$

3. Si $k_1 > 1$, alors :

$$\begin{aligned} t &= (00)^2 \cdot (11)^{k_1} \cdots (11)^{k_j} \cdot w \\ &= (00) \cdot (0011) \cdot (11)^{k_1 - 1} \cdots (11)^{k_j} \cdot w \\ &\longrightarrow (00) \cdot 111000 \cdot (11)^{k_1 - 1} \cdots (11)^{k_j} \cdot w \\ &= (0011)1000 \cdot (11)^{k_1 - 1} \cdots (11)^{k_j} \cdot w \\ &= 111000[10]00 \cdot (11)^{k_1 - 1} \cdots (11)^{k_j} \cdot w \\ &\xrightarrow{*} 111000|||| \\ &= 111|||| \end{aligned}$$

□

9 Conclusion

La détérmination de la complexité de la normalisation des redex internes et des sorties de ces redex internes est un outil adéquat pour l'étude des compléxité des systèmes de réécritures orthogonaux. Dans [8, 9, 10] nous avons obtenus aussi des résultats dans ce domaine.

Remerciements

Je remercie Ursula Martin et Jean Pierre Lescanne pour leur organisation du *First Workshop on Termination* tenu à l'Université de St. Andrews en Ecosse. Je remercie également Hans Zantema, Maria Ferreira, Nachum Dershowitz, Alfons Geser et Adam Cichon pour les échanges qui ont permis ce travail.

Références

1. F. Bellegarde and P. Lescanne. *Transformation Ordering.* In: 2nd TAPSOFT, pages 69–80. Lect. Notes in Comp. Science **249**, Springer, Berlin, (1987).
2. N. Dershowitz and C. Hoot. *Topics in termination.* In: Proc. 3rd Int. Conf. Rewriting Techniques and Applications, pages 109–120. Lect. Notes in Comp. Science **690**, Springer, Berlin, (1993).
3. N. Dershowitz and J.P. Jouannaud. *Rewrite Systems.* In: Handbook of Theoretical Computer Science, Volume B, pages 243–320, Elsevier, Amsterdam, (1990).
4. A. Geser *A Solution to Zantema's Problem.* Technical Report, MIP-9314, Univ. Passau (December 1993).
5. G. Huet and J.-J. Lévy. *Computations In Orthogonal Rewrites Systems I.* In: J. Lassez and G. Plotkin, editors, Computational Logic: Essays in Honour of Alan Robinson, chapter 11, pages 395–414. MIT Press, Cambridge, Massachussets. (1992).
6. M.J. O'Donnell. *Computing in Systems Described by Equations.* Lect. Notes in Comp. Science, **58**, Springer, Berlin, (1977).
7. J. W. Klop *Term Rewriting Systems.* In: S. Abramsky, D. Gabbay, and T. Maibaum, editors, Handbook of Logic in Computer Science, volume 2, chapter 1, pages 2–117. Clarendon Press, Oxford, (1992).
8. E. Tahhan *Calcul, dérivations, réécritures et normalisation.* Mémoire de D.E.A. Université Claude-Bernard. Lyon-1.(1990)
9. E. Tahhan. *Bornes Supérieures de Terminaison de Systèmes de Réécritures Strictement Orthogonaux.* Prépublication 17, LLAIC1 Universié d'Auvergne. (1993).
10. E. Tahhan. Thèse en préparation.

This article was processed using the LaTeX macro package with LLNCS style

Unité de Recherche INRIA Lorraine
Technopôle de Nancy-Brabois - Campus Scientifique
615, rue du Jardin Botanique - B.P. 101 - 54602 VILLERS LES NANCY Cedex (France)

Unité de Recherche INRIA Rennes IRISA, Campus Universitaire de Beaulieu 35042 RENNES Cedex (France)
Unité de Recherche INRIA Rhône-Alpes 46, avenue Félix Viallet - 38031 GRENOBLE Cedex (France)
Unité de Recherche INRIA Rocquencourt Domaine de Voluceau - Rocquencourt - B.P. 105 - 78153 LE CHESNAY Cedex (France)
Unité de Recherche INRIA Sophia Antipolis 2004, route des Lucioles - B.P. 93 - 06902 SOPHIA ANTIPOLIS Cedex (France)

EDITEUR
INRIA - Domaine de Voluceau - Rocquencourt - B.P. 105 - 78153 LE CHESNAY Cedex (France)

ISSN 0249 - 6399

RR_2202